HET EXPERIMENT VAN GALILEI MET HET HELLEND VLAK

Robert E. Jonckheere

INLEIDING

Het is genoegzaam bekend dat Galilei proeven deed met ballen rollend op een hellend vlak en daarbij aantoonde dat onder invloed van de zwaartekracht een eenparig versnelde beweging ontstaat: de afgelegde wegen verhouden zich als de kwadraten der looptijden.

In 2013 bouwde François Thijs, een technisch zeer begaafde vrijwilliger van onze vereniging, een moderne proefopstelling die toelaat deze proeven van Galilei te herhalen en tevens daaruit de waarde van de valversnelling "g" te bepalen.

BOUW

Het hellend vlak wordt gevormd door twee evenwijdige rails, waarvan de helling binnen zekere grenzen instelbaar is en waarop naar keuze diverse ballen kunnen rollen. Bovenaan wordt de bal losgelaten met een beginsnelheid die praktisch nul is. Onderaan wordt de bal opgevangen en dan teruggevoerd naar de beginpositie, zodat de proef meerdere malen kan herhaald worden.

Op negen gelijkmatig verdeelde afstanden wordt de looptijd elektronisch gemeten in aantallen tijdsdelen van 1/50 seconde vanaf het ogenblik van loslaten van de bal. Deze aantallen worden getoond op numerieke displays.

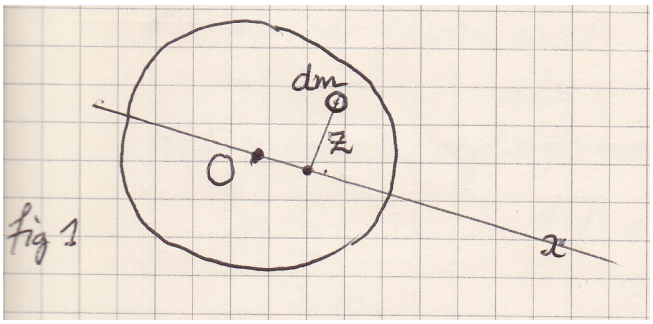
EXPLOITATIE VAN DE RESULTATEN

De exploitatie van de metingen gaf aanvankelijk aanleiding tot verkeerde resultaten. Dit had geenszins te maken met de bouw van de proefopstelling, ook niet met de onvermijdelijke meetfouten, maar wel met de foute interpretatie van het concept van deze proef. Deze bijdrage hoopt ter zake de nodige verduidelijking te verschaffen.

Men mag de bal niet beschouwen als een star lichaam dat zich verplaatst over het hellend vlak, zonder ermee rekening te houden dat het lichaam ook rolt: er vindt dus tegelijkertijd translatie en rotatie van het bewegend lichaam plaats en het dynamisch gedrag daarvan is totaal verschillend van het gedrag van een star lichaam dat van boven naar beneden glijdt over het hellend vlak.

Een glijdend star lichaam wordt enkel gekenmerkt door zijn massa, die men geconcentreerd mag denken in zijn massamiddelpunt. De rollende bal heeft ook een massa maar wordt tevens gekenmerkt door zijn massatraagheidsmoment ten opzichte van zijn rotatieas.

Wat is dit massatraagheidsmoment?



Figuur 1

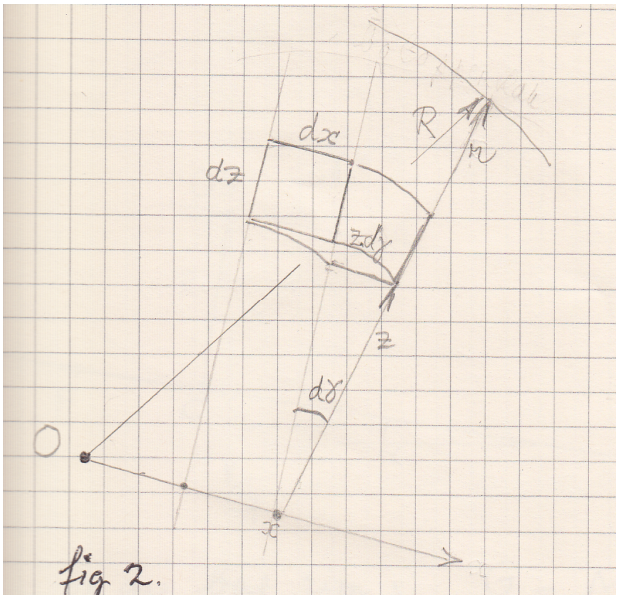
Beschouw een oneindig klein massadeeltje *dm* ergens binnenin de bal en gelegen op een afstand *Z* van de rotatieas *Ox*. De bal heeft een middelpunt *O* en een straal *R*. Het traagheidsmoment van dat massadeeltje ten opzichte van de rotatieas *Ox* is dan: $Z^2 \,.\, dm$
(NB: het punt stelt een product voor).

Om nu het massatraagheidsmoment van de bal te vinden, moet men de som maken van al deze producten uitgestrekt over de gehele massa van die bal, waarbij men dient rekening te houden met het feit dat die bal eventueel uit diverse materialen is samengesteld en dat de bal ofwel massief of hol kan zijn. Een dergelijke som noemt men in de wiskunde een integraal.

Men kan zich in dit stadium van de uitleg reeds inbeelden dat b.v. ballen met eenzelfde massa eventueel toch een verschillend massatraagheidsmoment hebben en dan ook een verschillend dynamisch gedrag vertonen.

Massatraagheidsmoment van een homogene massieve bal

We gaan dit traagheidsmoment berekenen ten opzichte van de rotatieas *Ox*.



Figuur 2

We verdelen daartoe de bol met straal R in (oneindig) dunne schijven met straal r en een dikte dx, loodrecht op de rotatieas Ox.
Elke cirkelvormige schijf wordt verdeeld in sectoren, met een (oneindig) kleine hoek $d\gamma$.
Uit een dergelijke sector namen we een segment met afmetingen dx, dz en $z.d\gamma$.

Het volume van dit segment is: $dV = dx\,.\,dz\,.\,z.d\gamma$

De massa ervan is: dm = $\rho\,.\,dV$ als ρ = massadichtheid.

Het massatraagheidsmoment t.o.v. de rotatieas Ox is $dJ = Z^2\,.\,dm$
$= \rho\,.\,dx\,.\,z^3\,.\,dz\,.\,d\gamma$

De waarde van J wordt bekomen door driemaal te integreren waarbij γ varieert tussen O en 2π, z varieert tussen O en r, en x varieert tussen $-R$ en $+R$, en waarbij $r^2 = R^2 - x^2$

Na al deze bewerkingen vindt men uiteindelijk:

$$J = \frac{8}{15}\pi.\rho.R^5 \qquad (1)$$

We kunnen deze waarde van het traagheidsmoment ook nog uitdrukken in functie van de massa van de massieve bol:

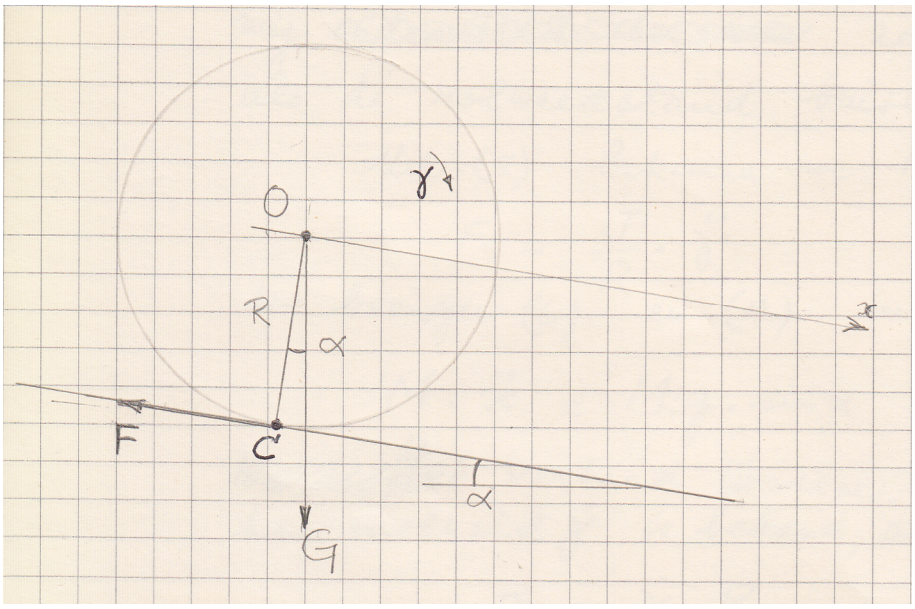
$$M = \frac{4}{3}\pi.\rho.R^3$$

Als we de waarde van de massadichtheid hieruit halen en substitueren in (1) bekomen we:

$$J = 0{,}4MR^2 \qquad (2)$$

als waarde van het massatraagheidsmoment ten opzichte van de rotatieas door zijn massamiddelpunt O voor een homogene massieve bol met straal R en massa M. Dit is een elegante en zeer eenvoudige uitdrukking.

De bewegingsvergelijkingen van de rollende bal



Figuur 3

Een massieve bal met massa *M* en straal *R* rolt onder invloed van het zwaartekrachtsveld (*g*) van een helling die een hoek α maakt met de horizontaal.

Het massamiddelpunt *O* verplaatst zich volgens *Ox*, evenwijdig met het hellend vlak.

De krachten die aangrijpen op de bal zijn: $G = M \,.\, g$ en een zekere wrijvingskracht *F*.

Het gewicht *G* heeft een component $G \,.\, \cos\alpha$ die de bal tegen het hellend vlak aandrukt en verder geen effect heeft op de translatiebeweging van de bal. De andere component van *G*, namelijk $G \,.\, \sin\alpha$ doet de bal naar beneden rollen.

Er werkt ook een zekere kracht *F* in het contactpunt *C* op de bal, doch over de grootte ervan kan men niets zeggen, omdat wij ondersteld hebben dat de bal rolt, zonder te glijden.

We passen nu de wet van Newton toe, namelijk massa *M* maal versnelling $\ddot{x}$ is gelijk aan de som van de krachten die de translatieversnelling veroorzaken volgens *Ox*:

$$M \,.\, \ddot{x} = G \,.\, \sin\alpha - F \qquad (3)$$

met: $G = M \,.\, g$ (4)

De bal gaat rollen rond zijn middelpunt *O*, waarbij de rotatiehoek γ is, en dus kunnen we een bewegingsvergelijking voor de rotatie opstellen: het massatraagheidsmoment *J* maal de hoekversnelling $\ddot{\gamma}$ is gelijk aan de som der momenten, die de rotatie veroorzaken:

$$J \,.\, \ddot{\gamma} = F \,.\, R \qquad (5)$$

Noteer dat het moment van het gewicht *G* ten opzichte van het massamiddelpunt nul is.

NB: $\ddot{x}$ en $\ddot{\gamma}$ zijn de tweede afgeleiden naar de tijd van x resp. γ en dus de translatieversnelling resp. rotatieversnelling van de bal.

Bij het opstellen van de bewegingsvergelijkingen hebben wij zowel de luchtweerstand als de rolweerstand buiten beschouwing gelaten.

Uit (5) bekomen we *F*:

$$F = \frac{J}{R} . \ddot{\gamma} \tag{6}$$

We brengen (6) en (4) in (3) en bekomen:

$$M . \ddot{x} = M . g . \sin\alpha - \frac{J}{R} . \ddot{\gamma} \tag{7}$$

Het verband tussen translatiesnelheid $\dot{x}$ en de hoeksnelheid $\dot{\gamma}$ is bekend, aangezien de bal zuiver rolt:

$$\dot{x} = \dot{\gamma} . R \tag{8}$$

waaruit door afleiden naar de tijd volgt:

$$\ddot{x} = \ddot{\gamma} . R \tag{9}$$

De waarde van $\ddot{\gamma}$ uit (9) brengen we in (7):

$$M . \ddot{x} = M . g . \sin\alpha - \frac{J}{R^2} . \ddot{x} \tag{10}$$

waaruit na herschikking en deling door *M* volgt:

$$\left(1 + \frac{J}{MR^2}\right) . \ddot{x} = g . \sin\alpha \tag{11}$$

Dus de rollende bal krijgt een translatieversnelling langs het hellend vlak gegeven door:

$$\ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{J}{MR^2}} . g . \sin\alpha \tag{12}$$

En als de bal homogeen en massief is geldt (2) zoals hogerop gezien:

$$J = 0{,}4 MR^2$$

en dus bedraagt de translatieversnelling:

$$\ddot{x} = \frac{1}{1,4} . g . \sin\alpha \qquad (13)$$

waarin met luchtweerstand en rolweerstand geen rekening werd gehouden.

Voor een massa die naar beneden glijdt over een hellend vlak vindt men:

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) . g . \sin\alpha$$

indien er rekening wordt gehouden met een wrijvingscoëfficiënt f.

Houdt men daar geen rekening mee, dan is:

$$\ddot{x} = g . \sin\alpha$$

We kunnen nu ook intuïtief aanvoelen waarom bij de experimenten met het hellend vlak de voorkeur gegeven wordt aan rollende ballen i.p.v. aan een glijdende massa. Inderdaad, rolweerstand heeft veel minder effect dan wrijving. Het is niet voor niets dat een auto en een fiets wielen hebben.

Theoretische opbouw van de experimenten

Wij merken op dat de translatieversnelling (13) voor een gegeven helling α een constante is, die we eenvoudigheidshalve a zullen noemen:

$$a = \frac{1}{1,4} g . \sin\alpha \qquad (14)$$

De door de bal afgelegde weg s wordt bekomen door (13) tweemaal te integreren:

$$s = \frac{1}{2} a . t^2 + v . t + s_0$$

De experimentele opstelling is zodanig ingericht dat de beginvoorwaarden nul zijn:

$$v_0 = 0 \text{ en } s_0 = 0$$

zodat:

$$s = \frac{1}{2} a . t^2 = C\, t^2 \qquad (15)$$

waarbij: C = constante

Deze uitdrukking geldt voor elk meetpunt.

Voor het eerste meetpunt geldt dus:

$$s_1 = \frac{1}{2} a . t_1^{\ 2} = C t_1^{\ 2} \quad \text{waaruit: } t_1 = \sqrt{\frac{s_1}{C}}$$

Voor het vierde meetpunt geldt:

$$s_4 = \frac{1}{2} a . t_4^{\ 2} = C t_4^{\ 2} \quad \text{waaruit: } t_4 = 2\sqrt{\frac{s_1}{C}}$$

Doch: $s_4 = 4 . s_1$

Dus: $t_4 = 2 . t_1$

En evenzo voor het negende meetpunt:

$$s_9 = 9 . s_1 \qquad \text{waaruit: } t_9 = 3\sqrt{\frac{s_1}{C}}$$

Dus: $t_9 = 3 . t_1$

Als wij bijgevolg de looptijden voor het eerste, vierde en negende meetpunt noteren en vaststellen dat

$$t_4 = 2 . t_1 \ \text{ en } t_9 = 3 . t_1 \qquad (16)$$

dan hebben we genoegzaam aangetoond dat de beweging van de bal veroorzaakt door de versnelling g van het zwaarteveld wel degelijk eenparig versneld is.

Om de numerieke waarde van de versnelling g te vinden gaan we uit van (14) geldig voor een homogene, massieve bal:

$$g = \frac{1,4}{\sin\alpha} . a \qquad (17)$$

met $a = \frac{2s}{t^2}$ (18)

Deze uitdrukking kunnen we op elk meetpunt toepassen. Wij merken op dat er gedeeld wordt door $\sin\alpha$.

De numerieke waarde daarvan hangt af van onze kennis van de hoek α, de hoek die het hellend vlak maakt met de horizon. De waarde van α is klein gekozen, zo rond 12 graden. Laten wij dus eens nagaan hoe sterk de sinus varieert in de buurt van 12° :

sin 10° = 0,17365
sin 11° = 0,19081
sin 12° = 0,20791
sin 13° = 0,22494
sin 14° = 0,24192

Het valt op dat per graad de waarde van $\sin\alpha$ met grofweg een kleine 10 % varieert!
Dat is heel veel. Dat betekent dat we een zeer zorgvuldige meting van α zullen moeten verrichten.

Metingen

De metingen werden verricht met behulp van een grote massieve kunststof bal. Enkel de looptijden voor het eerste en het vierde en het negende werden opgenomen, tot viermaal toe in elk meetpunt, zodat gemiddelden konden gemaakt worden. De getallen stellen het aantal pulsen van 1/50 seconde voor.

1ste meetpunt	4e meetpunt	9e meetpunt
s_1 = 0,24 m	s_4 = 0,96 m = 4 . s1	s_9 = 2,16 m = 9 . s1
28	57	87
27	55	86
27	56	86
28	57	87
gemiddelde looptijd	gemiddelde looptijd	gemiddelde looptijd
t_1 = 27,5 pulsen	t_4 = 56,25 pulsen = 2,04 t_1	t_9 = 86,5 pulsen = 3,14 t_1

Het 4e meetpunt geeft een mooi resultaat op 2 % na, het 9e meetpunt een fout van iets minder dan 5 %. Het feit dat de looptijd telkens iets groter uitvalt dan de theoretische waarde is naar alle waarschijnlijkheid te wijten aan de diverse weerstanden, die we verwaarloosd hebben in onze berekeningen, waardoor de bal dus iets langer onderweg is.

Daarmee is dus (16) aangetoond, zoals voorzien. Om nu de valversnelling uit deze resultaten te kunnen berekenen moet de hoek α zo precies mogelijk gemeten worden.

We hebben dit gedaan door een groot stuk hard karton met een recht afgesneden zijde, verticaal op het hellend vlak te plaatsen in de richting van de grootste helling. Met een waterpas werd daarop een horizontale rechte getrokken, en met behulp van een winkelhaak een verticale lijn, zodat een grote rechthoekige driehoek bekomen wordt.

De zijden ervan werden zorgvuldig opgemeten: rechthoekszijden: 320 mm en 69 mm, hypotenusa 328 mm. De hellingshoek α is begrepen tussen de hypotenusa en de lange rechthoekzijde.

Op al deze metingen is een zekere fout gemaakt, en dus leek het gepast om een gemiddelde te maken met behulp van drie trigonometrische functies, waarin telkens twee van de drie metingen voorkomen:

$$tan\alpha = \frac{69}{320} = 0{,}216 \quad \text{waaruit:} \quad \alpha_1 = 12°11'$$

$$cos\alpha = \frac{320}{328} = 0{,}975 \quad \text{waaruit:} \quad \alpha_2 = 12°45'$$

$$sin\alpha = \frac{69}{328} = 0{,}215 \quad \text{waaruit:} \quad \alpha_3 = 12°25'$$

Uit de drie waarden van α berekenen we het gemiddelde als zijnde de meest waarschijnlijke waarde:

$$\alpha_m = 12°27'$$

$$sin\alpha_m = 0{,}2156$$

en daarmee zullen we verder werken.

Uit (17) en (18) bekomen we voor de valversnelling:

$$g = 2{,}8 \frac{s}{t^2 \,.\, sin\alpha_m}$$

Deze uitdrukking is geldig in elk meetpunt.

Ook hier zullen we weer gemiddelden berekenen: inderdaad, we hebben 4 metingen verricht in elk van de 3 meetpunten, dus 12 metingen:

Uit $s_1 = 0{,}24\ m$ en $t_1 = \frac{27{,}5}{50}\ sec$ resulteert: $g_1 = 9{,}8501 \frac{m}{s^2}$

Uit $s_2 = 0{,}96\ m$ en $t_2 = \frac{56{,}25}{50}\ sec$ resulteert: $g_2 = 9{,}3728 \frac{m}{s^2}$

Uit $s_3 = 2{,}16\ m$ en $t_3 = \frac{86{,}5}{50}\ sec$ resulteert $g_3 = 10{,}3037 \frac{m}{s^2}$

De gemiddelde waarde uit de 12 metingen bedraagt:

$$g = 9{,}84 \frac{m}{s^2}$$

Besluit

Wij hebben aangetoond dat men de proef met de rollende bal niet mag verwarren met het eenvoudige geval van een massa glijdend op een hellend vlak en vervolgens de slechte resultaten toeschrijven aan zg. onvermijdelijke constructiefouten, meetfouten en rekenfouten. Men moet beginnen met het concept van de proef correct te begrijpen en dan de beweging van de rollende bal in vergelijking te brengen, waarbij hogere wiskunde en theoretische mechanica onmisbaar blijken te zijn. In de tijd van Galilei was deze nog niet beschikbaar. Men moest wachten op Newton en vele andere wetenschappers. Het eindresultaat van deze eerder ingewikkelde beschrijving van het experiment is echter gemakkelijk te gebruiken.

Wij hebben daarmee aangetoond dat de nieuwe proefopstelling van MIRA op zeer eenvoudige wijze toelaat vast te stellen dat de beweging inderdaad eenparig versneld is, zoals Galileï reeds beweerde. Verder kunnen we de lokale waarde van de valversnelling "g" bepalen met een zeer beperkte experimentele fout.

Deze nieuwe didactische proefopstelling is gemakkelijk in het gebruik, geeft goede resultaten en is daardoor een waardevolle aanwinst voor Volkssterrenwacht MIRA.